3) 例えば J. P. Vigier and S. Roy: Hadronic J. Suppl. **1** (1985) 475; T. Takabayashi: Proc. of the ISQM（上掲）.

4) E. Nelson: Phys. Rev. **150** (1966) 107.

5) G. Parisi and Yong-Shi Wu: Sci. Sin. **24** (1981) 483.

6) 例えば, M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454; Commun. Math. Phys. **51** (1976) 183.

7) 例えば, D. J. E. Collaway and A. Rahman: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 613.

8) H. Nakazato and Y. Yamanaka: Phys. Rev. **D34** (1986) 492; H. Nakazato: Prog. Theor. Phys. 印刷中。

9) S. Chaturvedi, A. K. Kapoor and V. Srinivasan: Phys. Lett. **B157** (1985) 400; I. Ohba: Prog. Theor. Phys. 投稿中。

なお，今回のテーマについては次の報告も見ていただけると幸です。

M. Namiki: Proc. of the ISQM-Tokyo '87 （1987年4月刊行予定，日本物理学会）。

自己相似性の統計熱力学形式 I

慶大・理　井上政義　藤坂博一

カオスの物理は次の様に分類されるだろう。Ⓐシナリオ（発生），Ⓑ定常カオス，Ⓒ非定常カオス（過渡）。Aについては普遍的法則が発見され，かなり解明が進んでいる。またこれは統計物理学の〝相転移現象〟に対応している。Cは非平衡系の統計物理学に対応しており，シンプルな一般論は難しいと思われる。Bは熱平衡系の統計物理に対応しておりそれを解明する一般的理論形式をここでは論ずる事にする。

熱平衡系と定常カオスのパラレリズム（Parallelism）は，その基本的立脚点が共通している事によって成立している。それは(1)問題とすべき性質（物理量）として〝長時間にわたる大域的性質〟を取扱う。(2)大域的物理量として〝指数的特性量の極限値〟を採用する。例としては $W \sim e^{S/k}$; $N \to \infty$ の場合，エントロピー S が指数的特性量である。

まず熱平衡系統計力学の理論形式を復習する。粒子数 N，体積 V の系のエネルギーを $E(N,V)$ とすると，この系の分配関数 Z は

$$Z(N,\ \beta,\ V)=\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\Omega(N,\ E,\ V)\,e^{-\beta E(N,V)} \tag{1}$$

$$=< \exp[-\beta E(N, V)]>, \tag{2}$$

ここで$\Omega(N, E, V)$は状態密度，βは逆温度である。ヘルムホルツの自由エネルギーFは

$$F(N, \beta, V) = -\frac{1}{\beta} \ln < \exp[-\beta E(N, V)]> \tag{3}$$

もし，$\beta = -\theta$と取れば，Zはモーメント母関数$-\beta F$はキュムラント母関数である。また$\beta = -i\xi$と取ればZは特性関数とみなせる。巨視系の熱力学量を導くためには，熱力学的極限をとる必要がある。相を定義するためには，この操作が必要不可欠である。極限を取った一粒子当りの自由エネルギーは次の様に表わせる，

$$f(v, \beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln < \exp[-\beta E(N, V)]> \tag{4}$$

ここで$v\ (=V/N)$は一定としている。極限操作$N\to\infty$によって本質的性質(bulk property)が抽出される。$-\beta f(v, \beta)$はもはやキュムラント母関数ではなく，逆変換によって$\Omega(N, E)$を求める事はできない。すなわち，情報の縮約が行なわれている。

ところで定常一次元時系列$\{\Delta_j\}$の相似指数λ_qは次の様に定義される[1)]

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln < \exp(q n_j)> \ ; \ -\infty < q < \infty \tag{5}$$

with

$$n_j = \sum_{s=0}^{j=-1} \Delta_s \tag{6}$$

ここで$<\cdots>$はアンサンブル平均である。(4)と(5)の比較より次の対応関係を得る。

$$\begin{array}{cccc} f(\beta) & E(N) & N & -\beta \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \lambda_q & n_j & j & q \end{array} \tag{7}$$

すなわち，λ_qを自由エネルギーとみたて，qを$-\beta$に対応させれば，一次元時系列(カオス・マップなどによって発生される)の統計熱力学形式が構成できる。

ところでβは逆温度であるという明確な物理的内容をもっている。qはいわば，モーメントの次数であるから，このままの解釈では(7)の対応は形式的なものに留まる。相似指数λ_qについては次の様に解釈できる事がわかっている。[2)] 間欠性ブランチ$q \gg \lambda_\infty / D$ ($q \ll \lambda_{-\infty}/D$; $D \equiv \mathrm{d}\lambda_q/\mathrm{d}q \mid_{q=0}$)では大きな$n_j$(小さな$n_j$)が主要に$\lambda_q$に寄与し，$q=0$の時はアンサンブル・メンバーのどれもが一様に寄与する。熱平衡系統計物理では低温$\beta \gg 1$では小さなエネルギーをもつ状態が主に寄与し，無限大温度$\beta = 0$では，どの状態も一様に寄与する。このようにβとqは寄与をコントロールするパラメーターになっている。そこで我々はβ，qの

意味を表わす新しい概念として "filtering parameter" を導入する。[3] ここでいう filter はフーリエ成分のフィルターや，単に重みづけ（例 $w_1 a + w_2 b + \cdots$ における w_i）のパラメーターではなく，指数的特性量 $f(v, \beta)$（λ_q）への加算的量 $E(N, V)$（n_j）の寄与を(4)((5))の形でコントロールしているものである。

散逸カオス系の運動の特徴はストレンジ・アトラクターに表われている。このアトラクターの次元は場所によって違い得るので Hentschel-Procaccia,[4] Grassberger[5]は次の一般次元 D_q を導入した。

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i{}^q \tag{8}$$

ここで $N(\varepsilon)$ はスケール ε の空でない立体の数，P_i は立体 i の出現確率である。(8)を次の様に書きなおす，

$$D_{q'} = -\frac{1}{q'} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \ln < \exp(q' \ln P) > \tag{9}$$

with

$$q' = q - 1 \tag{10}$$

(5)と(9)の比較より次の対応を得る

$$\begin{array}{cccc} \lambda_q & n_j & j & q \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ D_{-q'} & -\ln P & \ln(1/\varepsilon) & q' \end{array} \tag{11}$$

一般次元 D_q の場合，$D_{q=\infty}$ は最も密な測度をもつ領域に対応し，$D_{q=-\infty}$ は最も希薄な測度をもつ領域に対応している。[6] この例では q（q'）が filtering parameter である。

Takahashi - Oono[7] によって導入された自由エネルギー $F(f, \beta)$ は

$$F(f, \beta) = -\frac{1}{\beta} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln \sum_{\mathrm{Fix}(f^n) \ni z} \exp[-\beta \,|\, (f^n)'(z) \,|] \tag{12}$$

この $F(f, \beta)$ も λ_q と同じ構造をもっていることがわかる。この例では β が filtering parameter である。

この様な形式をもった特性量は乱流理論にもある。以上の様な理論形式を "自己相似性" を基本仮定として統一し，ルジャンドル変換によって熱力学体系を構成する試みを次のⅡで述べる。[8] これによって定常カオスの統計熱力学を含む理論形式およびその形式の解釈が出来たといえる。

なお，保存系カオス，量子系カオス，多自由度カオスおよび時空カオスにはそれぞれ特有な問題があるがここでは触れなかった。

文　献

1) H. Fujisaka: Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 513.
2) H. Fujisaka and M. Inoue: Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 20.
3) M. Inoue and H. Fujisaka: Preprint (*Analytic Properties of Characteristic Exponents for Chastic Dynamical Systems*).
4) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia: Physica **8D** (1983) 435.
5) P. Grassberger: Phys. Lett. **97A** (1983) 227.
6) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman: Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.
7) Y. Takahashi and Y. Oono: Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 851.
8) H. Fujisaka and M. Inoue: Preprint. (*Statistical-thermodynamic Formalism of Self-Similarity*).

自己相似性の統計熱力学形式 II

慶大・理　　藤坂博一，井上政義

一次元定常列 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$ に対して，物理量 A_n が

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \mathrm{e}^{u_n} \tag{1}$$

を満すとき，A_n は自己相似的[1]であると呼ぶことにする。定常列 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$ は定常確率過程，或いは定常カオス過程から生成されるものとし，本研究は $n \to \infty$ での A_n の大局的ふるまいを調べることを目的とする。このような自己相似性は fractal sets の理論,[2] 発達した乱流における速度構造関数の理論,[3] 或いは筆者による相似指数関数の理論[4),5)]にみられる。

A_n の統計的性質を調べるのにそのモーメント $M_n(q) \equiv \langle [A_n]^q \rangle$ (q : real) を考える。(1)を解くと

$$A_n = A_0 \exp(nZ_n), \tag{2}$$